Technische Universität Dresden

Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Wissensbasierte Systeme

Formale Systeme
8. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch — Dr. Stephan Mennicke

Woche vom 8.–14. Dezember 2025 — Wintersemester 2025/26

Aufgabe zur Selbstkontrolle (diese werden in den Übungen nicht besprochen)

S15) Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{S, U, X, T, V, W, Y, D, E, A, B, C\}, \Sigma, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned} P \;=\; \{ & S \longrightarrow UT, S \longrightarrow VW, U \longrightarrow XB, U \longrightarrow AB, \\ & X \longrightarrow AU, T \longrightarrow TC, T \longrightarrow c, V \longrightarrow AV, \\ & V \longrightarrow a, W \longrightarrow BY, W \longrightarrow BC, Y \longrightarrow WC, \\ & D \longrightarrow BC, D \longrightarrow BB, D \longrightarrow b, E \longrightarrow AB, \\ & E \longrightarrow AA, A \longrightarrow a, B \longrightarrow b, C \longrightarrow c\} \,. \end{aligned}$$

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus (mit der Matrix-Notation aus der Vorlesung), um für die Wörter $w_1 = aabcc$ und $w_2 = aabbcc$ zu entscheiden, ob $w_i \in L(G)$ ist.

S16) Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P \;=\; \{ & S \longrightarrow AB, S \longrightarrow BC, S \longrightarrow bab, \\ & A \longrightarrow BA, A \longrightarrow a, \\ & B \longrightarrow ABC, B \longrightarrow b, \\ & C \longrightarrow AB, C \longrightarrow a, C \longrightarrow \varepsilon\} \,. \end{aligned}$$

a) Transformieren Sie die Grammatik G in eine ε-freie Grammatik G'.

b) Transformieren Sie die Grammatik G' in ihre *Chomsky*-Normalform.

c) Entscheiden Sie mithilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob $w \in L(G)$ gilt.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Sprachen L_i ist kontextfrei? Zur Begründung Ihrer Antwort sollten Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen verwenden oder eine entsprechende kontextfreie Grammatik angeben.

a) $L_1 = \{a^n b^n c^n d^n \in \{a, b, c, d\}^* \mid n \geq 1\}$

b) $L_2 = \{a^m b^n c^p d^q \in \{a,b,c,d\}^* \mid m,n,p,q \geq 1 \text{ und } m+n = p+q\}$

Aufgabe 2

Beweisen Sie mithilfe der Abschlusseigenschaften für kontextfreie Sprachen, dass die nachfolgende Sprache

$$L_0 = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i,j,k \geq 1\}$$

kontextfrei ist und geben dann eine kontextfreie Grammatik G_0 für L_0 an mit $L_0 = L(G_0)$.

Aufgabe 3

Geben Sie für die nachfolgenden Sprachen L_i jeweils eine (kontextfreie) Grammatik G_i in CNF mit $L_i \setminus \{\varepsilon\} = L(G_i)$ an:

a) Es sei L_1 genau die Menge der Palindrome über $\Sigma = \{a,b\}$.

(Palindrome sind Wörter, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich sind,

z.B. aba, $abba$, a, ε, bb)

b) Es sei L_2 die Sprache aller $w \in \{a,b\}^*$ mit gleicher Anzahl an a's und b's.

Aufgabe 4

Gegeben seien L_1, L_2 wie in Aufgabe 3. Wenden Sie den CYK-Algorithmus für folgende Instanzen an um zu prüfen ob das jeweilige Wort zur entsprechenden Sprache gehört:

(a) L_1 mit $w = abba$ sowie $w = aba$

(b) L_2 mit $w = aababb$

Aufgabe 5

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Ist $L \subseteq \Sigma^*$ eine kontextfreie Sprache, so ist auch $\pi(L)$ kontextfrei, wobei

$\pi(L) \; = \; \{a_1 \dots a_n \in \Sigma^* :$ Es existiert eine Permutation $(i_1 \dots i_n)$ von $(1 \dots n)$, so dass $a_{i_1} \dots a_{i_n} \in L\}$