Technische Universität Dresden

Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Wissensbasierte Systeme

Formale Systeme – Automaten und Berechenbarkeit
Probeklausur

Prof. Markus Krötzsch — Dr. Stephan Mennicke

Besprechung am 05.02.2026 — Wintersemester 2025/26

Aufgabe 1 (3+1+1+2=7 Punkte)

a) Geben Sie die formale Definition eines *nichtdeterministischen Kellerautomaten* an. Vervollständigen Sie hierfür den nachfolgenden Text:

   Ein nichtdeterministischer Kellerautomat (PDA) ist ein Sechs-Tupel $\mathcal{M} = \langle \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad \rangle$ mit den folgenden Bestandteilen: ...

b) Welcher andere Akzeptanzbegriff für Kellerautomaten ist laut Anmerkung in der Vorlesung auch möglich?

c) Benennen Sie formal die Unterschiede zwischen deterministischen und nicht-deterministischen Kellerautomaten.

d) Welcher Typ formaler Sprachen wird durch deterministische und welcher durch nichtdeterministische Kellerautomaten charakterisiert? Benennen Sie jeweils eine Sprache genau diesen Typs.

Aufgabe 2 (2+4=6 Punkte)

a) Formulieren Sie formal präzise das *Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.* Vervollständigen Sie hierfür den nachfolgenden Text:

   Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 0$, so dass gilt: ...

b) Zeigen Sie mithilfe des *Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen*, dass die Sprache $L = \{0^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 3 (2+2+1+3=8 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V = \{S, A, B\},\ \Sigma = \{a, b\}$ und
$P = \{S \to ASB,\ S \to AB,\ AB \to BA,\ A \to a,\ B \to b\}$.

a) Von welchem maximalen Typ ist G? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie vier Wörter $w_1, w_2, w_3, w_4 \in L(G)$ mit $|w_1| = |w_2| = |w_3| = |w_4| = 4$ an.

c) Beschreiben Sie die durch G erzeugte Sprache $L(G)$ in einer geeigneten Notation.

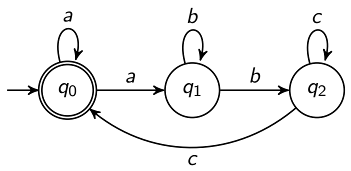
Gegeben sei das Wort $w = abac$ und die Grammatik $G' = (V', \Sigma', P', S')$ mit

$V' = \{S, A, B, C, D\},\ \Sigma' = \{a, b, c\}$ und
$P' = \{S \to AB,\ A \to BA,\ A \to a, B \to AC,\ B \to BB,\ B \to b,$
$C \to c,\ D \to AB\}$.

d) Entscheiden Sie mithilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob $w \in L(G')$ gilt. Transformieren Sie, falls notwendig, G in *Chomsky*-Normalform.

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

Gegeben sei der NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, \{q_0\}, \{q_0\})$ mit δ:



a) Berechnen Sie mithilfe des Arden-Lemmas einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$.

b) Konstruieren Sie einen zu $\mathcal{M}$ äquivalenten DFA $\mathcal{M}'$. Verwenden Sie dazu die Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung. Stellen Sie dabei sicher, dass der konstruierte Automat keine unerreichbaren Zustände erhält.

Aufgabe 5 (5+4=9 Punkte)

Geben Sie die Nerode-Äquivalenzklassen für die nachfolgenden Sprachen an.

- $L_1 = L((ab)^* a^* \mid b)$
- $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$

Geben Sie außerdem den Minimalautomaten für L_1 an.

Aufgabe 6 (2+4+2 = 8 Punkte)

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Gegeben eine deterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über dem Eingabealphabet $\{0, 1, \dots, 9\}$ und eine Zahl n, hält $\mathcal{M}$ nach höchstens n Schritten bei Eingabe 42?

b) Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, ist $L(\mathcal{M})$ unendlich?

c) Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über einem einelementigen Eingabealphabet, erkennt $\mathcal{M}$ nur Palindrome?

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \left\lfloor \sqrt{3x} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also $\lfloor x \rfloor := \mathsf{max}\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet. Dabei dürfen Sie die Abkürzungen für Zuweisung von Konstanten, `IF` und die arithmetischen Operationen (`+`, `-`, `*`, `/`) zwischen Variablen benutzen. Erläutern Sie die Arbeitsweise Ihres Programms.

Aufgabe 8 (2+2+3=7 Punkte)

Zu einem gegebenen Alphabet Σ seien zwei nichtdeterministische endliche Automaten (NFA) $\mathcal{M}_i = \langle Q_i, \Sigma, \delta_i, Q_0^i, F_i \rangle$ ($i = 1, 2$) mit disjunkten Zustandsmengen (d.h. $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$) gegeben.

Wir definieren den Automaten $\mathcal{M}_1 \| \mathcal{M}_2$ durch $\langle Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, Q_0^1 \times Q_0^2, F_1 \times F_2 \rangle$ mit der Übergangsfunktion δ, sodass für alle $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$ und $a \in \Sigma$ gilt:

$$\delta((q_1, q_2), a) := \{(q_1', q_2) \mid q_1' \in \delta_1(q_1, a)\} \cup \{(q_1, q_2') \mid q_2' \in \delta_2(q_2, a)\}$$

Wir nennen $\mathcal{M}_1 \| \mathcal{M}_2$ das Interleaving der Automaten $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$.

a) Welchen Sprachoperator implementiert $\|$? Gegeben zwei reguläre Sprachen L_1, L_2 mit entsprechenden NFAs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ (d.h. $L(\mathcal{M}_1) = L_1$ und $L(\mathcal{M}_2) = L_2$). Beschreiben Sie die Sprache $L(\mathcal{M}_1 \| \mathcal{M}_2)$ in Abhängigkeit von L_1 und L_2.

b) Der soeben eingeführte Sprachoperator heißt auch *Shuffle* ($L_1 \| L_2$ ist der Shuffle von L_1 und L_2). Sind reguläre Sprachen unter Shuffle abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

c) Sind die entscheidbaren Sprachen ebenfalls unter Shuffle abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort.