



## Theoretische Informatik und Logik

Sommersemester 2022

### Probeklausur

#### Aufgabe 1

(10 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antworten.

- a) Gilt  $NL = EXPTIME$ , dann ist das Halteproblem entscheidbar.
- b) Das Herbrand-Universum einer prädikatenlogischen Formel in Skolemform ist stets endlich.
- c) Eine prädikatenlogische Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell hat.
- d) Die QBF  $\exists p. \forall q. \exists r. ((p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r))$  ist wahr.
- e) Die Beantwortung von Datenbankabfragen in Form prädikatenlogischer Formeln ist – im Bezug auf die Größe der Datenbank *und* der Formel – NP-schwer.

**Aufgabe 2****(8 Punkte)**

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) Gegeben eine Turing-Maschine  $\mathcal{M}$  über dem Eingabealphabet  $\{0, 1, \dots, 9\}$  und eine Zahl  $n$ , hält  $\mathcal{M}$  nach höchstens  $n$  Schritten bei Eingabe 42? (2)
- b) Gegeben eine Turing-Maschine  $\mathcal{M}$ , ist  $L(\mathcal{M})$  unendlich? (4)
- c) Gegeben eine Turing-Maschine  $\mathcal{M}$  über einem einelementigen Eingabealphabet, erkennt  $\mathcal{M}$  nur Palindrome? (2)

**Aufgabe 3****(8 Punkte)**

Sei  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f(x) = \lfloor \sqrt{3x} \rfloor$ . Hierbei bezeichnet die Funktion  $\lfloor \cdot \rfloor$  die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also  $\lfloor x \rfloor := \max \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$ .

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches  $f$  berechnet. Dabei dürfen Sie die Abkürzungen für Zuweisung von Konstanten, **IF** und die arithmetischen Operationen (+, -, \*, /) zwischen Variablen benutzen. Erläutern Sie die Arbeitsweise Ihres Programms.

#### Aufgabe 4

(8 Punkte)

In der Vorlesung wurde das Postsche Korrespondenzproblem vorgestellt:

---

*Problem:* **PCP**

*Gegeben:* Eine endliche Folge von Wortpaaren  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$ .

*Gefragt:* Gibt es eine Folge von Zahlen  $i_1, \dots, i_\ell$ , so dass gilt

$$x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = y_{i_1} \cdots y_{i_\ell}$$

wobei  $\ell > 0$  ist und  $i_j \in \{1, \dots, k\}$  für alle  $j = 1, \dots, \ell$ ?

---

- a) Betrachten Sie die folgende Instanz des PCPs: (2)

$$(ab, a), (a, a), (cd, bcd)$$

Zeigen Sie, dass jedes Paar in mindestens einer Lösung vorkommt.

- b) Zeigen Sie, dass das PCP mit  $|x_1| = |y_1|, |x_2| = |y_2|, \dots, |x_k| = |y_k|$  entscheidbar ist. (3)
- c) Ist die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche eine Lösung haben, semi-entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (3)

## Aufgabe 5

(10 Punkte)

In der Vorlesung wurden das folgende Problem vorgestellt:

---

*Problem: SAT*

*Gegeben:* Eine aussagenlogische Formel  $F$  in konjunktiver Normalform (KNF).

*Gefragt:* Gibt es eine Belegung der Atome in  $F$ , die  $F$  wahr macht?

---

Wir verwenden außerdem das folgende Problem:

---

*Problem: Stabile Menge*

*Gegeben:* Ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  mit  $E \subseteq V \times V$ .

*Gefragt:* Gibt es eine Menge  $M \subseteq V$ , die die folgenden Bedingungen erfüllt?

- Für alle  $m, n \in M$  gilt, dass  $(m, n) \notin E$ ;
  - für alle  $n \in V \setminus M$  gilt, dass es ein  $m \in M$  gibt mit  $(m, n) \in E$ .
- 

Betrachten Sie nun folgenden Versuch, das Problem **SAT** auf das Problem **Stabile Menge** zu reduzieren.

Wir definieren nachfolgend eine Funktion, die aussagenlogische Formeln in KNF auf gerichtete Graphen abbildet. Sei  $F = K_1 \wedge \dots \wedge K_m$  eine Formel mit  $m$  Klauseln und  $K_i = L_{i,1} \vee \dots \vee L_{i,j_i}$  für  $1 \leq i \leq m$ . Wir konstruieren den Graphen  $G_F = (V, E)$  wie folgt:  $V = \{u_1, \dots, u_m\} \cup \{v_{1,1}, \dots, v_{1,j_1}, v_{2,1}, \dots, v_{m,j_m}\}$ , d.h. für jede Klausel in  $F$  und für jedes Literal in jeder Klausel  $K_i$  bekommt  $G_F$  einen Knoten;  $E = \{(u_i, u_i) \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{(v_{i,j}, u_i) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq j_i\} \cup \{(v_{i,j}, v_{x,y}), (v_{x,y}, v_{i,j}) \mid L_{i,j} = \neg L_{x,y}\}$ , d.h. (1) für jede Klausel hat ihr Knoten eine Kante zu sich selbst; (2) der Knoten eines Literals hat eine Kante zum Knoten einer Klausel, wann immer das Literal in der Klausel vorkommt; und (3) zwei Literal-Knoten werden in beide Richtungen per Kante miteinander verbunden, wenn ihre Literale zueinander widersprüchlich sind.

- a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel  $F = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \wedge s)$  (3)  
nach, d.h. konstruieren Sie für  $F$  den Graphen  $G_F$ . (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)

Hat  $G_F$  eine stabile Menge? Markieren Sie sie in der Skizze.

- b) Was müsste gezeigt werden, um zu beweisen, dass die angegebene Funktion tatsächlich eine polynomielle Reduktion von **SAT** auf **Stabile Menge** darstellt? Es genügt, wenn Sie die konkret zu zeigenden Aussagen auflisten, den Beweis selbst müssen Sie nicht durchführen. (3)

- c) Welche der folgenden beiden Aussagen werden durch diese Reduktion gezeigt? (1)

- Stabile Menge** ist in NP.
- Stabile Menge** ist NP-schwer.

- d) Ist **Stabile Menge** NP-vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort. (3)

**Aufgabe 6****(8 Punkte)**Welche der angegebenen Interpretationen sind Modelle der folgenden Formel  $F$ ?

$$F = \forall x.p(x, x) \wedge \forall x, y.(p(x, y) \rightarrow p(y, x)) \wedge \forall x, y, z.((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

- a)  $\mathcal{I}_1$  mit  $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \mathbb{N}$  und  $p^{\mathcal{I}_1} = \{ (m, n) \mid m \leq n \}$ ;
- b)  $\mathcal{I}_2$  mit  $\Delta^{\mathcal{I}_2} = \Sigma^*$  für ein Alphabet  $\Sigma$  und  $p^{\mathcal{I}_2} = \{ (x, y) \mid |x| = |y| \}$ ;
- c)  $\mathcal{I}_3$  mit  $\Delta^{\mathcal{I}_3} = \mathbb{N}$  und  
 $p^{\mathcal{I}_3} = \{ (m, n) \mid \text{es gibt } p, q, r \in \mathbb{N}, r < 7, \text{ so dass } m = p \cdot 7 + r \text{ und } n = q \cdot 7 + r \}$ ;
- d)  $\mathcal{I}_4$  mit  $\Delta^{\mathcal{I}_4} = \Sigma^*$  für das Alphabet  $\Sigma = \{0, 1, 2\}$  und  
 $p^{\mathcal{I}_4} = \{ (x, y) \mid x \text{ und } y \text{ enden mit verschiedenen Symbolen} \}$ .

**Aufgabe 7****(8 Punkte)**Gegeben ist das folgende Datalog-Programm  $P$ :

$$O(x, y) \leftarrow n(x, y)$$

$$O(x, z) \leftarrow O(x, y) \wedge n(y, z)$$

$$R(x) \leftarrow s(y, x) \wedge O(x, y)$$

$$R(x) \leftarrow s(y, x) \wedge R(y)$$

$$n(a, b) \quad n(b, c) \quad n(c, d) \quad n(d, e)$$

$$s(a, b) \quad s(c, a) \quad s(b, d) \quad s(b, e)$$

Berechnen Sie schrittweise die Mengen  $T_P^0, T_P^1, T_P^2, \dots$ Wann wird der Grenzwert  $T_P^\infty$  erreicht?

**Aufgabe 8****(12 Punkte)**

- a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln
- $F$
- und
- $G$
- .

(6)

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y))$$

$$G = \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

- b) Gegeben ist die Theorie
- $\mathcal{T}$
- durch die Klauseln

(6)

$$(1) \quad \{\neg p(x), q(x, y)\}$$

$$(2) \quad \{p(x), q(x, f(x))\}$$

wobei  $x$  und  $y$  Variablen sind.

Prüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, ob  $\mathcal{T} \models \exists v.q(c, v)$  gilt, wobei  $c$  eine Konstante und  $v$  eine Variable ist.