

Theoretische Informatik und Logik

7. Übungsblatt

Sommersemester 2021

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe L

Zeigen Sie folgende Aussagen:

- Ist $L_2 \in \text{PSPACE}$ und gilt $L_1 \leq_p L_2$, so ist auch $L_1 \in \text{PSPACE}$.
- Ist L_1 ein PSPACE-hartes Problem, und gilt $L_1 \leq_p L_2$, dann ist auch L_2 ein PSPACE-schweres Problem.

Aufgabe M

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Jedes PSPACE-schwere Problem ist NP-schwer.
- Es gibt kein NP-schweres Problem, welches in PSPACE liegt.
- Jedes NP-vollständige Problem liegt in PSPACE.
- Es gilt $\text{NP} = \text{PSPACE}$, wenn es ein PSPACE-schweres Problem in NP gibt.
- Wenn $\text{P} \neq \text{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-schweres Problem in P.
- Sei L ein PSPACE-vollständiges Problem. Dann gilt $L \in \text{P} \iff \text{P} = \text{PSPACE}$.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass PSPACE unter Komplement, Durchschnitt, Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Aufgabe 2

Wir betrachten das japanische Spiel *Gomoku*, welches von zwei Spielern X und O auf einem 19×19 -Brett gespielt wird. Die Spieler setzen abwechselnd ihre Steine auf das Brett, und derjenige Spieler, der zuerst fünf Steine in einer Reihe (horizontal, vertikal, oder diagonal) gelegt hat, gewinnt. Spieler X beginnt.

Verallgemeinertes Gomoku wird statt auf einem Brett fester Größe auf einem beliebigen $n \times n$ -Brett gespielt. Eine *Position* in diesem Spiel ist eine Belegung der Felder des Spielbretts mit Steinen der Spieler X und O, wie sie in einem wirklichen Spiel auftreten könnte. Sei

$$\text{GM} := \{ \text{enc}(B) \mid B \text{ ist eine Position im verallgemeinerten Gomoku,} \\ \text{in der X eine Gewinnstrategie hat} \},$$

wobei $\text{enc}(B)$ die zeilenweise Kodierung der Position B über einem festen Alphabet ist.

Zeigen Sie $\text{GM} \in \text{PSPACE}$.

Aufgabe 3

Welche der folgenden QBF-Formeln sind erfüllbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) $\exists p_1. p_1$
- b) $\forall p_1. p_1$
- c) $\exists p_1. \perp$
- d) $\forall p_1. \exists p_2. p_2 \rightarrow p_1$
- e) $\forall p_1. \exists p_2. \forall p_3. (p_1 \vee p_2) \wedge p_3$
- f) $\forall p_1. \forall p_2. \exists p_3. \forall p_4. (p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_4) \vee \neg p_3$

Aufgabe 4

Ein *linear bounded automaton* (LBA) ist eine deterministische Turing Maschine \mathcal{M} , die bei jeder Berechnung niemals mehr Platz benutzt als bereits durch die Eingabe belegt ist. Dies erreicht \mathcal{M} dadurch, dass sie niemals ein \square überschreibt und den Lesekopf nach links bewegt, sobald sie ein \square liest.

Zeigen Sie, dass das Wortproblem für LBA

$$\mathbf{P}_{\text{LBA}} := \{ \text{enc}(\mathcal{M})\#\#\text{enc}(w) \mid \mathcal{M} \text{ ein LBA, der } w \text{ akzeptiert} \}.$$

ein PSPACE-vollständiges Problem ist.