



Übungen zur Lehrveranstaltung
Theoretische Informatik und Logik

Sommersemester 2024

8. Übungsblatt

Woche vom 17. bis 23. Juni

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe P

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x. \exists y. (p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

- die Menge aller Teilformeln;
- die Menge aller Terme;
- die Menge aller Variablen, mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen;
- ein Interpretation \mathcal{I} und eine Zuweisung \mathcal{Z} für $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$.

Aufgabe Q

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \rightarrow G$ allgemeingültig ist.
- Es gilt $\{F_1, \dots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^k F_i \rightarrow G$ allgemeingültig ist.

Aufgabe R

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x. (F \rightarrow G) \equiv \forall x. F \rightarrow \exists x. G.$$

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Universum aus verschiedenen Personen und Speisen und ein Prädikat mag , so dass $mag(x, y)$ ausdrückt „ x mag y “.

- „Übersetzen“ Sie folgende prädikatenlogische Formeln in natürlichsprachlich formulierte

Aussagen:

- (a) $\forall x. mag(x, Eiscreme)$.
 - (b) $\forall x. \exists y. mag(x, y)$.
 - (c) $\forall x. \forall y. mag(x, y) \vee \neg mag(x, y)$.
- b) „Übersetzen“ Sie folgende natürlichsprachlich formulierte Aussagen in prädikatenlogische Formeln:
- (a) Tom mag keinen Fisch.
 - (b) Jeder, der Pizza mag, mag auch Spaghetti.
 - (c) Es gibt niemanden, der alles mag.

Aufgabe 2

Welche der angegebenen Strukturen sind Modelle der folgenden Formel?

$$\forall x. p(x, x) \wedge \forall x, y. ((p(x, y) \wedge p(y, x)) \rightarrow x \approx y) \wedge \forall x, y, z. ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$$

- a) \mathcal{I}_1 mit Grundmenge \mathbb{N} und $p^{\mathcal{I}_1} = \{ (m, n) \mid m < n \}$;
- b) \mathcal{I}_2 mit Grundmenge \mathbb{N} und $p^{\mathcal{I}_2} = \{ (n, n + 1) \mid n \in \mathbb{N} \}$;
- c) \mathcal{I}_3 mit Grundmenge \mathbb{N} und $p^{\mathcal{I}_3} = \{ (m, n) \mid m \text{ teilt } n \}$;
- d) \mathcal{I}_4 mit Grundmenge Σ^* für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_4} = \{ (x, y) \mid x \text{ ist Präfix von } y \}$;
- e) \mathcal{I}_5 mit Grundmenge $\mathfrak{P}(M)$ für eine Menge M und $p^{\mathcal{I}_5} = \{ (X, Y) \mid X \subseteq Y \}$.

Aufgabe 3

- a) Geben Sie je eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, so dass alle Modelle

- (a) höchstens drei,
- (b) mindestens drei,
- (c) genau drei

Elemente in der Grundmenge besitzen.

- b) Geben Sie je eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, so dass das zweistellige Prädikatensymbol p in jedem Modell als der Graph einer

- (a) injektiven Funktion,
- (b) surjektiven Funktion,
- (c) bijektiven Funktion

interpretiert wird.

(Der Graph einer Funktion $f: A \rightarrow B$ ist die Relation $\{ (x, y) \in A \times B \mid f(x) = y \}$.)

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) Sind Γ und Γ' Mengen von prädikatenlogischen Formeln, dann folgt aus $\Gamma \subseteq \Gamma'$ und $\Gamma \models F$ auch $\Gamma' \models F$.
- b) Jede aussagenlogische Formel ist eine prädikatenlogische Formel.
- c) Eine prädikatenlogische Formel F ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.
- d) Es gilt

$$\{ \forall x, y. (p(x, y) \rightarrow p(y, x)), \forall x, y, z. ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z)) \} \models \forall x. p(x, x).$$