Technische Universität Dresden

Formale Systeme

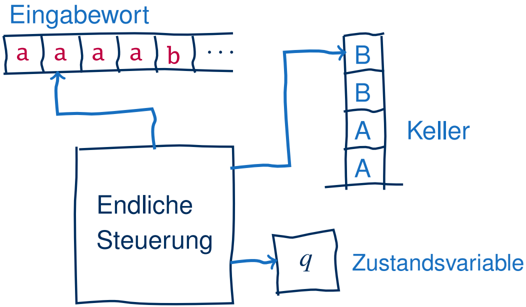
16. Vorlesung: Kellerautomaten & CFGs

Markus Krötzsch

Professur für Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 8. Dezember 2025

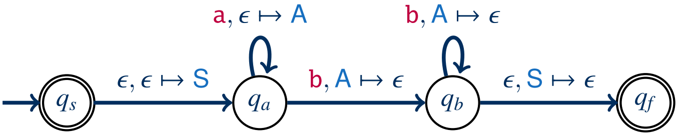
Kellerautomat = NFA + Stapelspeicher



Eine mögliche Konfiguration des PDA während der Erkennung ist gegeben durch den Zustand $q \in Q$, den Inhalt des Kellers $\gamma \in \Gamma^*$ und das noch zu lesende Restwort $w \in \Sigma^*$.

Kellerautomaten (PDAs)

Beispiel eines PDA für $\{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \geq 0\}$:



Ein Kellerautomat (international: „PDA"/„Pushdown Automaton") $\mathcal{M}$ ist ein Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, Q_0, F\rangle$ mit Zustandsmenge Q, Eingabealphabet Σ, Kelleralphabet Γ, Startzuständen Q_0, Endzuständen F und Übergangsfunktion δ:

$$Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \to 2^{Q \times \Gamma_\epsilon}$$

wobei $\Sigma_\epsilon = \Sigma \cup \{\epsilon\}$ und $\Gamma_\epsilon = \Gamma \cup \{\epsilon\}$.

Ausdrucksstärke von PDAs

Ausdrucksstärke von PDAs

Man kann nun formal untersuchen, welche Sprachen durch PDAs akzeptiert werden können. Wir erhalten das erhoffte Resultat:

Satz: Eine Sprache ist genau dann kontextfrei wenn sie von einem PDA akzeptiert wird.

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten:

(1) Umwandlung Typ-2-Grammatik $\rightsquigarrow$ PDA

(2) Umwandlung PDA $\rightsquigarrow$ Typ-2-Grammatik

PDA $\rightsquigarrow$ Grammatik

Satz: Für jeden PDA $\mathcal{P}$ gibt es eine kontextfreie Grammatik $G_{\mathcal{P}}$, so dass $\mathbf{L}(\mathcal{P}) = \mathbf{L}(G_{\mathcal{P}})$.

Beweisidee: Für jedes Paar von Zuständen q und r betrachten wir die Sprache $\mathbf{L_{q,r}}$, die durch $\mathcal{P}$ akzeptiert wird, wenn man mit leerem Keller in Zustand q beginnt und in Zustand r mit leerem Keller endet, d.h.

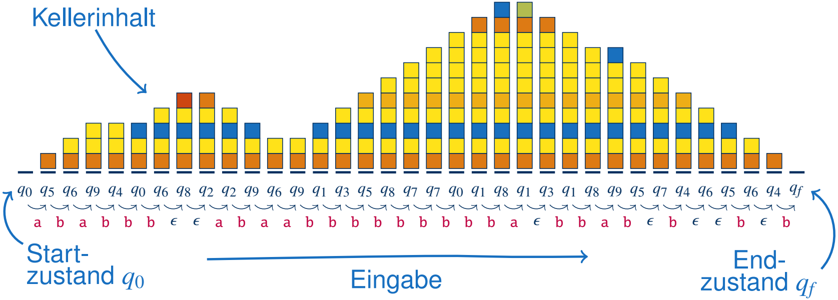
$$w \in \mathbf{L_{q,r}} \quad \text{genau dann wenn} \quad \langle q, w, \epsilon\rangle \vdash^* \langle r, \epsilon, \epsilon\rangle$$

- $\mathbf{L_{q,r}}$ wird in der Grammatik durch eine Variable $\mathsf{V_{q,r}}$ dargestellt
- Wir modifizieren $\mathcal{P}$, so dass
  - $\mathcal{P}$ genau einen Startzustand q_0 und genau einen Endzustand q_f hat
  - der Keller vor Erreichen von q_f geleert werden muss

$\rightsquigarrow$ Die gesuchte Sprache $\mathbf{L}(\mathcal{P})$ ist genau $\mathbf{L}_{q_0, q_f}$

Die Sprache $\mathbf{L_{q,r}}$

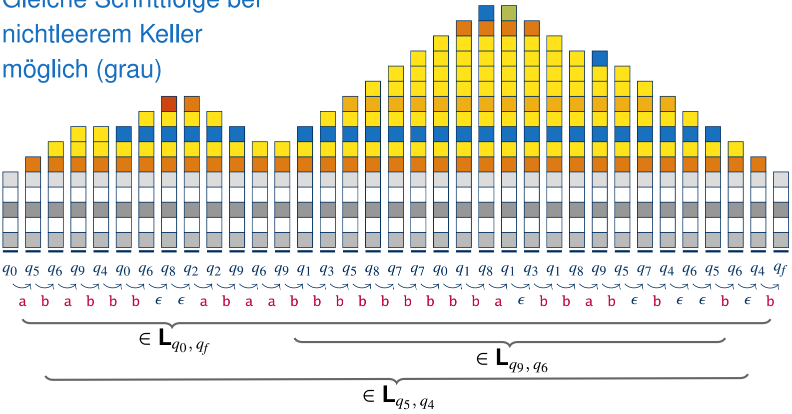
Schematische Darstellung der Konfigurationsfolge bei der Akzeptanz eines Wortes aus $\mathbf{L}_{q_0,\,q_f}$:



Die Sprache $\mathbf{L}_{\mathbf{q,r}}$ (2)

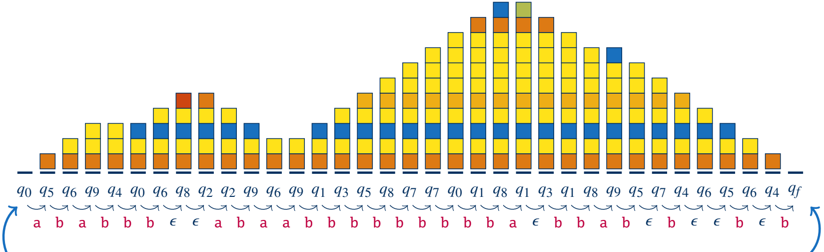
Schematische Darstellung der Konfigurationsfolge bei der Akzeptanz eines Wortes aus $\mathbf{L}_{q_0,q_f}$:

Gleiche Schrittfolge bei nichtleerem Keller möglich (grau)



Die Sprache $\mathbf{L_{q,r}}$ (3)

Schematische Darstellung der Konfigurationsfolge bei der Akzeptanz eines Wortes aus $\mathbf{L}_{q_0,q_f}$:



$\langle q_5, \blacksquare \rangle \in \delta(q_0, \mathtt{a}, \epsilon)$ $\qquad$ $\langle q_f, \epsilon \rangle \in \delta(q_4, \mathtt{b}, \blacksquare)$

$$\leadsto \mathtt{a}\mathbf{L}_{q_5,q_4}\mathtt{b} \subseteq \mathbf{L}_{q_0,q_f}$$

Eine Grammatik für $\mathbf{L_{q,r}}$

Wir wollen für jedes $\mathbf{L_{q,r}}$ eine Variable $V_{q,r}$ einführen, welche diese Sprache definiert

Aus dem gerade Gesehenen folgt:

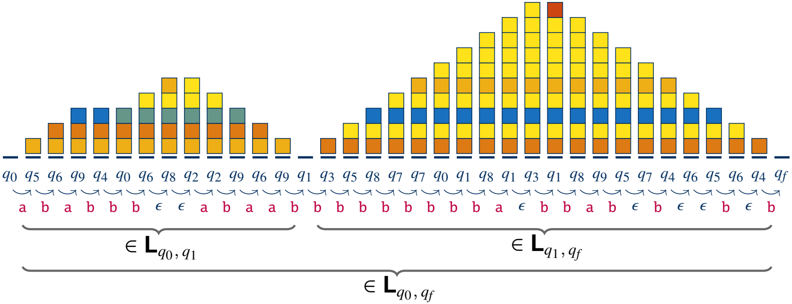
- Wenn es ein Kellersymbol A gibt und
- wenn es ein Symbol a und einen Zustand s_1 gibt, so dass $\langle s_1, A\rangle \in \delta(q, a, \epsilon)$, und
- wenn es ein Symbol b und einen Zustand s_2 gibt, so dass $\langle r, \epsilon\rangle \in \delta(s_2, b, A)$
- dann sollte die Grammatik die Regel

$$V_{q,r} \to aV_{s_1,s_2}b$$

  enthalten.

Die Sprache $\mathbf{L}_{\mathbf{q},\mathbf{r}}$ (4)

Es gibt einen zweiten relevanten Fall zur Ableitung von $\mathbf{L}_{q_0,q_f}$:



$$\rightsquigarrow \mathbf{L}_{q_0,q_1}\mathbf{L}_{q_1,q_f} \subseteq \mathbf{L}_{q_0,q_f}$$

Eine Grammatik für $\mathbf{L_{q,r}}$ (2)

Wir wollen für jedes $\mathbf{L_{q,r}}$ eine Variable $\mathsf{V}_{q,r}$ einführen, welche diese Sprache definiert

Aus dem gerade Gesehenen folgt:

- Für jeden Zustand s
- enthält die Grammatik die Regel

$$\mathsf{V}_{q,r} \to \mathsf{V}_{q,s}\mathsf{V}_{s,r}.$$

Außerdem benötigen wir noch die folgenden Regeln, damit die Ableitung irgendwann abgeschlossen werden kann:

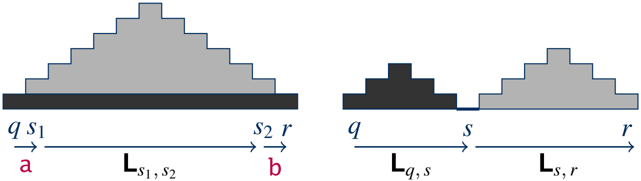
- Für jeden Zustand s
- enthält die Grammatik die Regel

$$\mathsf{V}_{s,s} \to \epsilon.$$

Zwischenbilanz

Bisher haben wir zwei Arten von Konfigurationsfolgen bzw. Grammatikregeln eingeführt:

$V_{q,r} \to aV_{s_1,s_2}b$ $\qquad$ $V_{q,r} \to V_{q,s}V_{s,r}$



Man könnte auf diese beiden Arten einen beliebigen Lauf in immer kleinere Schritte zerlegen und somit das erkannte Wort generieren. Den Abschluss bilden die Regeln $V_{s,s} \to \epsilon$.

Funktioniert das im Prinzip für alle Läufe von $\mathcal{P}$?

Nein: Damit kann man Läufe generieren, bei denen sich die Höhe des Kellers in jedem Schritt ändert. Bleibt der Keller über mehrere Schritte gleich hoch, dann hilft keine der Zerlegungen weiter.

Abschluss des Beweises

Problem: Unsere Zerlegung funktioniert nicht, wenn der Keller über mehrere Schritte die gleiche Höhe behält.

Lösung: Wir können PDAs so abwandeln, dass sie in jedem Schritt $\mathtt{pop}$ oder $\mathtt{push}$, aber nie beides ausführen.

Skizze:

- Übergänge mit $\mathtt{pop}$ und $\mathtt{push}$ zerlegt man mithilfe eines Zwischenzustands in einen $\mathtt{pop}$ und einen $\mathtt{push}$
- Übergänge ohne $\mathtt{pop}$ oder $\mathtt{push}$, stellt man dar, indem man zunächst ein Hilfszeichen $\mathtt{push}$t und dieses gleich darauf wieder $\mathtt{pop}$t

Mit diesen Änderungen gilt tatsächlich:

Fakt: $\mathsf{V}_{q,r}$ erzeugt ein Wort w genau dann wenn $\mathcal{P}$ von q mit leerem Keller zu r mit leerem Keller gelangen kann.

(ausführlicher Beweis siehe Sipser, „Introduction to the Theory of Computation“ (Int. Ed.), Abschnitt 2.2)

Der Beweis ist komplett

Zusammenfassung: Der PDA $\mathcal{P}$ wird so abgewandelt, dass

- $\mathcal{P}$ genau einen Startzustand q_0 und genau einen Endzustand q_f hat
- der Keller vor Erreichen von q_f geleert werden muss
- $\mathcal{P}$ in jedem Schritt pop oder push ausführt, aber nie beides

Die Grammatik $G(\mathcal{P})$ besteht aus den folgenden Regeln:

(1) Für alle $q, r, s_1, s_2 \in Q$, $a, b \in \Sigma_\epsilon$ und $\mathsf{A} \in \Gamma$, für die es Übergänge $\langle s_1, \mathsf{A}\rangle \in \delta(q, a, \epsilon)$ und $\langle r, \epsilon\rangle \in \delta(s_2, b, \mathsf{A})$ gibt, die Regel $\mathsf{V}_{\mathsf{q,r}} \to a\mathsf{V}_{\mathsf{s_1,s_2}}b$

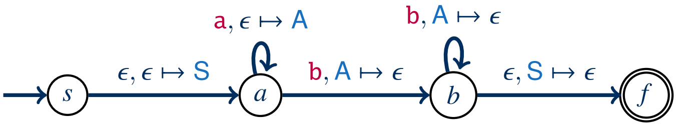
(2) Für alle Zustände $q, r, s \in Q$, die Regel $\mathsf{V}_{\mathsf{q,r}} \to \mathsf{V}_{\mathsf{q,s}}\mathsf{V}_{\mathsf{s,r}}$

(3) Für alle Zustände $s \in Q$, die Regel $\mathsf{V}_{\mathsf{s,s}} \to \epsilon$

Dann ist $\mathbf{L}(\mathcal{P}) = \mathbf{L}_{q_0,q_f}$. Die Grammatik $G(\mathcal{P})$ erzeugt diese Sprache, wenn wir $\mathsf{V}_{\mathsf{q_0,q_f}}$ als Startsymbol wählen. □

Beispiel

PDA für $\{a^i b^i \mid i \geq 1\}$:



Dieser PDA erfüllt die Anforderungen aus dem Beweis.

Als Grammatik ergibt sich:

$$V_{s,f} \to \epsilon V_{a,b} \epsilon$$

$$V_{a,b} \to a V_{a,b} b \mid a V_{a,a} b$$

$$V_{a,a} \to \epsilon \qquad V_{b,b} \to \epsilon \qquad V_{s,s} \to \epsilon \qquad V_{f,f} \to \epsilon$$

$$V_{a,a} \to V_{a,a} V_{a,a} \mid V_{a,b} V_{b,a} \mid V_{a,s} V_{s,a} \mid V_{a,f} V_{f,a} \qquad V_{a,b} \to \ldots \qquad \ldots$$

(nicht alle dieser Regeln werden wirklich benötigt)

Deterministische Kellerautomaten

Deterministische Kellerautomaten?

Es gibt verschiedene Quellen für Nichtdeterminismus bei PDAs:

- Übergangsfunktion liefert eine Menge möglicher Übergänge
- Mehrere mögliche Startzustände
- ϵ-Übergänge in Eingabe und Keller

Beispiel: Angenommen es gilt $\delta(q, \epsilon, \mathsf{A}) = \{\langle p, \mathsf{B}\rangle\}$ und $\delta(q, \mathsf{a}, \epsilon) = \{\langle r, \mathsf{C}\rangle\}$. Dann gibt es mehrere mögliche Übergänge, wenn in Zustand q das Symbol a gelesen wird und A auf dem Keller liegt. Und das obwohl die Übergangsfunktion nur einelementige Mengen liefert.

Deterministische Kellerautomaten müssen eingeschränkt werden, ohne ϵ-Übergänge ganz zu verbieten (ganz ohne ϵ-Übergänge sind PDAs zu schwach)

Deterministische Kellerautomaten

Ein deterministischer Kellerautomat (international: „DPDA“) $\mathcal{M}$ ist ein Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ mit den folgenden Bestandteilen:

- Q: endliche Menge von Zuständen
- Σ: Eingabealphabet
- Γ: Kelleralphabet
- δ: Übergangsfunktion, eine partielle Funktion

  $$Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \to Q \times \Gamma_\epsilon,$$

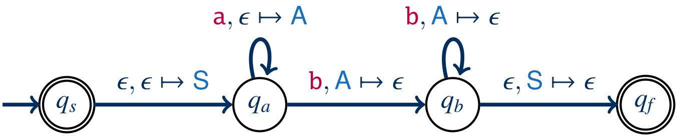
  so dass für alle $q \in Q$, $\mathtt{a} \in \Sigma$ und $\mathtt{A} \in \Gamma$
  jeweils nur eines der folgenden definiert ist:

  $$\delta(q, \mathtt{a}, \mathtt{A}) \qquad \delta(q, \mathtt{a}, \epsilon) \qquad \delta(q, \epsilon, \mathtt{A}) \qquad \delta(q, \epsilon, \epsilon)$$

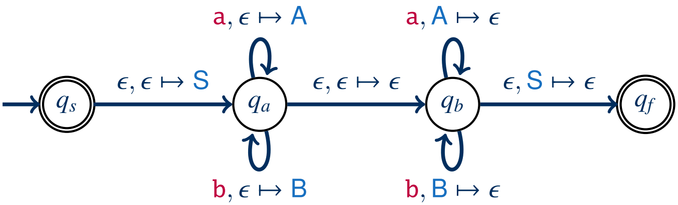
- q_0: ein Startzustand $q_0 \in Q$
- F: Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$

Beispiele

Dieser Automat ist ein DPDA:



Dieser Automat ist kein DPDA:



Deterministische kontextfreie Sprachen

DPDAs führen zu einer eigenen Sprachklasse:

> Eine Sprache ist deterministisch kontextfrei wenn sie durch einen deterministischen Kellerautomaten akzeptiert wird.

Offensichtlich ist jede deterministisch kontextfreie Sprache auch kontextfrei (DPDAs können als PDAs gesehen werden).

Im Gegensatz zur Situation bei DFAs und NFAs gilt die Umkehrung dieser Aussage nicht:

> **Satz:** Die deterministisch kontextfreien Sprachen bilden eine echte Untermenge der kontextfreien Sprachen.
> Es gibt also kontextfreie Sprachen, die nicht deterministisch sind.

Abschluss unter Komplement

Der Unterschied zu allgemeinen kontextfreien Sprachen zeigt sich gut am folgenden Ergebnis:

Satz: Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweisidee: Wie bei DFAs kann man auch bei DPDAs die akzeptierenden und nichtakzeptierenden Zustände vertauschen.

Mehrere technische Komplikationen machen den Beweis etwas aufwändiger:

- Ein DPDA kann ein Wort auf zwei Arten nicht akzeptieren: (1) nach dem Lesen der Eingabe ist der Automat nicht in einem Endzustand; (2) die Eingabe wird nie ganz gelesen, z.B. weil der Automat in eine Endlosschleife von ϵ-Übergängen gerät. Man muss Grund (2) ausschalten.
- Ein Lauf könnte mit einer Folge von ϵ-Übergängen enden, die akzeptierende und nichtakzeptierende Zustände enthält. In diesem Fall führt Austausch der Endzustände nicht zum gewünschten Ergebnis. Man muss sicherstellen, dass grundsätzlich (vor und nach der Komplementierung) nur der erste Zustand in einer Folge von ϵ-Übergängen akzeptieren darf.

(vollständiger Beweis siehe Sipser, Abschnitt 2.4) □

Nichtdeterministische kontextfreie Sprachen

Eine kontextfreie Sprache, deren Komplement nicht kontextfrei ist, kann demnach nicht deterministisch kontextfrei sein.

Beispiel: In Vorlesung 14 haben wir die Sprachen $\mathbf{L_1} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i\mathtt{c}^k \mid i \geq 0, k \geq 0\}$ und $\mathbf{L_2} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^k\mathtt{c}^k \mid i \geq 0, k \geq 0\}$ betrachtet und erkannt, dass die Sprache

$$\overline{\mathbf{L_1}} \cup \overline{\mathbf{L_2}} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i \neq j \text{ oder } j \neq k\} \cup (\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \circ \{\mathtt{ba}, \mathtt{ca}, \mathtt{cb}\} \circ \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*)$$

kontextfrei ist, aber ihr Komplement nicht. Diese Sprache ist demnach nicht deterministisch kontextfrei.

Das beweist im Wesentlichen die Behauptung, dass die deterministisch kontextfreien Sprachen eine echte Untermenge der kontextfreien sind.

Es gibt noch viele andere nichtdeterministische Sprachen, z.B.:

Beispiel: Die Sprache $\{ww^r \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$ der Palindrome gerader Länge (ohne Markierung in der Mitte) ist kontextfrei aber nicht deterministisch.
(Ohne Beweis; siehe z.B. Skript Franz Baader)

Zusammenfassung und Ausblick

PDAs erkennen genau die kontextfreien Sprachen:

- PDA $\rightsquigarrow$ Typ-2-Grammatik durch Simulation von Linksableitungen
- Typ-2-Grammatik $\rightsquigarrow$ PDA durch rekursive Erzeugung der Sprachen $\mathbf{L_{q,r}}$

Deterministische Kellerautomaten (DPDAs) erkennen nur eine echte Untermenge der kontextfreien Sprachen.

Offene Fragen:

- Wozu sind deterministische kontextfreie Sprachen gut?
- Welche Probleme auf CFGs kann man lösen?
- Was gibt es zu Typ 1 und Typ 0 zu sagen?