Technische Universität Dresden

Formale Systeme

2. Repititorium: Kontextfreie Sprachen, Turingmaschinen

Stephan Mennicke

Professur für Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 2. Februar 2026

(Kontextfreie) Sprachen, reguläre Ausdrücke und Grammatiken

Aufgabe S13)

Gegeben sind die Grammatiken G_1 und G_2.

- $G_1 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T\}, \Sigma = \{a, b\}$ und
  $P = \{S \to aT,\ S \to \varepsilon, T \to Sb\}$
- $G_2 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B\}, \Sigma = \{a, b\}$ und
  $P = \{S \to A,\ S \to \varepsilon,\ A \to ab,\ A \to aBb,\ aB \to aaBb,\ aB \to a\}$

Geben Sie für jede Grammatik $G \in \{G_1, G_2\}$ jeweils

a) das maximale i an, so dass G eine Typ-i Grammatik ist und

b) das maximale j an, so dass $L(G)$ eine Typ-j Sprache ist.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe S13)

- $G_1 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T\}, \Sigma = \{a, b\}$ und
  $P = \{S \to aT,\ S \to \varepsilon, T \to Sb\}$
- $G_2 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B\}, \Sigma = \{a, b\}$ und
  $P = \{S \to A,\ S \to \varepsilon,\ A \to ab,\ A \to aBb,\ aB \to aaBb,\ aB \to a\}$

a) G_1 besitzt die Form einer Typ 2 Grammatik, da die Regeln die Form $A \to v$ haben.Die Grammatik ist keine Typ 3 Grammatik, da rechts- und linksbündige Regeln enthalten sind.
   G_2 ist eine Typ 0 Grammatik. Sie erfüllt das Kriterium einer Grammatik, kann aber keine Typ 1 Grammatik sein, da nicht alle Regeln der Form $w \to v$ $|w| \leq |v|$ erfüllen (z.B. die Regel $aB \to a$).

b) $L(G_1) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist das bekannteste Beispiel einer kontextfreien Sprache, und ist somit eine Typ 2 Sprache.
   $L(G_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} = L(G_1)$ und ist somit auch eine Typ 2 Sprache.

Aufgabe S15)

Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{S, U, X, T, V, W, Y, D, E, A, B, C\}, \Sigma, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$
\begin{aligned}
P \quad = \quad & \{S \longrightarrow UT, S \longrightarrow VW, U \longrightarrow XB, U \longrightarrow AB, \\
& X \longrightarrow AU, T \longrightarrow TC, T \longrightarrow c, V \longrightarrow AV, \\
& V \longrightarrow a, W \longrightarrow BY, W \longrightarrow BC, Y \longrightarrow WC, \\
& D \longrightarrow BC, D \longrightarrow BB, D \longrightarrow b, E \longrightarrow AB, \\
& E \longrightarrow AA, A \longrightarrow a, B \longrightarrow b, C \longrightarrow c\} \ .
\end{aligned}
$$

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus (mit der Matrix-Notation aus der Vorlesung), um für die Wörter $w_1 = aabcc$ und $w_2 = aabbcc$ zu entscheiden, ob $w_i \in L(G)$ ist.

$\{D, E\}$ sind nicht erreichbar.

Aufgabe S15)

$$
\begin{aligned}
S &\to UT \mid VW \\
U &\to XB \mid AB \\
X &\to AU \\
T &\to TC \mid c \\
V &\to AV \mid a \\
W &\to BY \mid BC \\
Y &\to WC \\
A &\to a \\
B &\to b \\
C &\to c
\end{aligned}
$$

a	$\{A, V\}$	$\{V\}$	$\{X\}$	$\{S\}$	$\emptyset$
a		$\{A, V\}$	$\{U\}$	$\{S\}$	$\{S\}$
b			$\{B\}$	$\{W\}$	$\{Y\}$
c				$\{C, T\}$	$\{T\}$
c					$\{C, T\}$
	a	a	b	c	c

$w_1 = aabcc \notin L(G)$

Aufgabe S15)

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow UT \mid VW \\
U &\rightarrow XB \mid AB \\
X &\rightarrow AU \\
T &\rightarrow TC \mid c \\
V &\rightarrow AV \mid a \\
W &\rightarrow BY \mid BC \\
Y &\rightarrow WC \\
A &\rightarrow a \\
B &\rightarrow b \\
C &\rightarrow c
\end{aligned}$$

a	$\{A, V\}$	$\{V\}$	$\{X\}$	$\{U\}$	$\{S\}$	$\{S\}$
a		$\{A, V\}$	$\{U\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{S\}$
b			$\{B\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{W\}$
b				$\{B\}$	$\{W\}$	$\{Y\}$
c					$\{C, T\}$	$\{T\}$
c						$\{C, T\}$
	a	a	b	b	c	c

$$w_1 = aabbcc \in L(G)$$

Aufgabe S16)

Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P \quad = \quad & \{S \longrightarrow AB, S \longrightarrow BC, S \longrightarrow bab, \\ & A \longrightarrow BA, A \longrightarrow a, \\ & B \longrightarrow ABC, B \longrightarrow b, \\ & C \longrightarrow AB, C \longrightarrow a, C \longrightarrow \varepsilon\} \ . \end{aligned}$$

a) Transformieren Sie die Grammatik G in eine ε-freie Grammatik G'.

b) Transformieren Sie die Grammatik G' in ihre *Chomsky*-Normalform.

c) Entscheiden Sie mithilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob $w \in L(G)$ gilt.

Aufgabe S16) a) ε-Eliminierung

$$\begin{aligned} P \quad = \quad & \{S \longrightarrow AB, S \longrightarrow BC, S \longrightarrow bab, \\ & A \longrightarrow BA, A \longrightarrow a, \\ & B \longrightarrow ABC, B \longrightarrow b, \\ & C \longrightarrow AB, C \longrightarrow a, C \longrightarrow \varepsilon\} \ . \end{aligned}$$

$V_\epsilon = \{C\}$

$$\begin{aligned} P_1 = \{ & S \longrightarrow AB \mid B \mid BC \mid bab, \\ & A \longrightarrow BA \mid a, \\ & B \longrightarrow ABC \mid AB \mid b, \\ & C \longrightarrow AB \mid a\} \end{aligned}$$

Aufgabe S16) b) Chomsky-Normalform

$$\begin{aligned} P_1 = \{S &\longrightarrow AB \mid B \mid BC \mid bab, \\ A &\longrightarrow BA \mid a, \\ B &\longrightarrow ABC \mid AB \mid b, \\ C &\longrightarrow AB \mid a\} \end{aligned}$$

Kettenregel(n): $S \to B$

$$\begin{aligned} P_2 = \{S &\longrightarrow AB \mid ABC \mid b \mid BC \mid bab, \\ A &\longrightarrow BA \mid a, \\ B &\longrightarrow ABC \mid AB \mid b, \\ C &\longrightarrow AB \mid a\} \end{aligned}$$

Aufgabe S16) b) Chomsky-Normalform

$$\begin{aligned} P_2 = \{S &\longrightarrow AB \mid ABC \mid b \mid BC \mid bab, \\ A &\longrightarrow BA \mid a, \\ B &\longrightarrow ABC \mid AB \mid b, \\ C &\longrightarrow AB \mid a\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 = \{S &\longrightarrow AB \mid AC_{BC} \mid b \mid BC \mid X_b C_{ab}, \\ A &\longrightarrow BA \mid a, \\ B &\longrightarrow AC_{BC} \mid AB \mid b, \\ C &\longrightarrow AB \mid a, \\ C_{BC} &\longrightarrow BC, \quad C_{ab} \longrightarrow X_a X_b, \\ X_a &\longrightarrow a, \quad X_b \longrightarrow b\} \end{aligned}$$

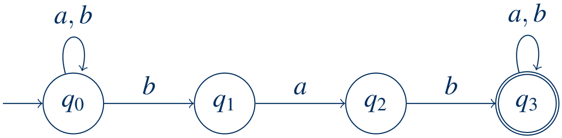
Aufgabe S16) c) CYK-Algorithmus $w = aaaab \in^{?} L(G)$

$$
\begin{aligned}
P_3 = \{S &\longrightarrow AB \mid AC_{BC} \mid b \mid BC \mid X_b C_{ab}, \\
A &\longrightarrow BA \mid a, \\
B &\longrightarrow AC_{BC} \mid AB \mid b, \\
C &\longrightarrow AB \mid a, \\
C_{BC} &\longrightarrow BC, \quad C_{ab} \longrightarrow X_a X_b, \\
X_a &\longrightarrow a, \quad X_b \longrightarrow b\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe S17)

Gegeben ist der folgende NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit

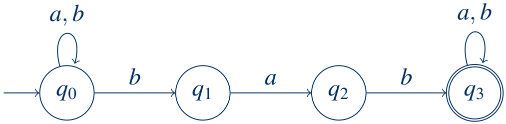
δ:



a) Berechnen Sie mithilfe des *Arden*-Lemmas einen regulären Ausdruck α mit $L(\mathcal{M}_1) = L(\alpha)$.

b) Geben Sie einen DFA $\overline{\mathcal{M}_2}$ an, der das Komplement von L akzeptiert, indem Sie aus $\mathcal{M}_1$ einen DFA $\mathcal{M}_2$ für L und aus $\mathcal{M}_2$ anschließend den Komplementautomaten $\overline{\mathcal{M}_2}$ bilden.

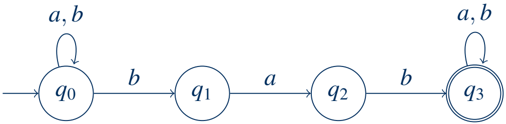
Aufgabe S17) a) Lemma von Arden



$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_0 \mid b\alpha_1 \\
\alpha_1 &\equiv a\alpha_2 \\
\alpha_2 &\equiv b\alpha_3 \\
\alpha_3 &\equiv a\alpha_3 \mid b\alpha_3 \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

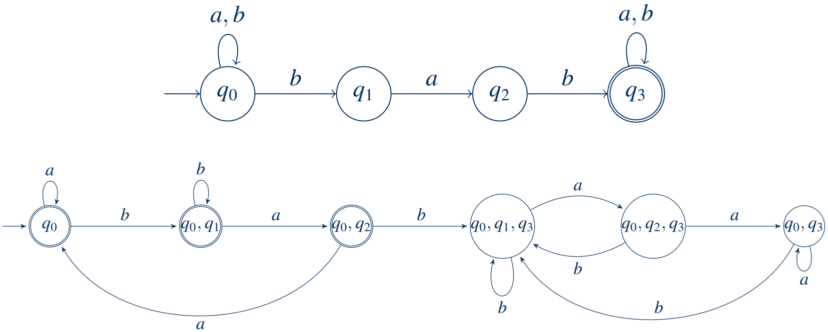
$$
\begin{aligned}
\alpha_3 &\equiv (a \mid b)\alpha_3 \mid \epsilon \\
&\equiv (a \mid b)^* \\
\alpha_2 &\equiv b(a \mid b)^* \\
\alpha_1 &\equiv ab(a \mid b)^*
\end{aligned}
$$

Aufgabe S17) a) Lemma von Arden



$$
\begin{aligned}
\alpha_3 &\equiv (a \mid b)\alpha_3 \mid \epsilon \\
&\equiv (a \mid b)^* \\
\alpha_2 &\equiv b(a \mid b)^* \\
\alpha_1 &\equiv ab(a \mid b)^* \\
\alpha_0 &\equiv a\alpha_0 \mid b\alpha_0 \mid bab(a \mid b)^* \\
&\equiv (a \mid b)\alpha_0 \mid bab(a \mid b)^* \\
&\equiv (a \mid b)^* bab(a \mid b)^*
\end{aligned}
$$

Aufgabe S17) b) Komplementautomatenkonstruktion



Turing-Maschine, (Semi-)Entscheidbarkeit, Unentscheidbarkeit

Aufgabe S19)

Geben Sie eine Turingmaschine $\mathcal{M}_{abc}$ an, welche die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 0\}$ erkennt.

Hinweis: Nutzen Sie die skizzenhafte Beschreibung der Arbeitsweise für eine solche TM aus der Vorlesung. Neben der Darstellung in Diagrammform ist ebenfalls die Darstellung der Übergangsfunktion δ in Tabellenform möglich. Achten Sie auf die Kommentare in der Tabelle.

Ideen?

Aufgabe S19) $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 0\}$

$\mathcal{M}_{abc} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \{q_f\})$ mit

- $Q = \{q_0, q_f, q_b, q_c, q_{ende?}, q_{ende!}, q_{anfang}\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\Gamma = \{a, b, c, X, \sqcup\}$
- δ bestimmt durch die Tupel folgender Tabelle ($\delta(q, n) = (q', m, A)$, mit $n, m \in \Gamma$ und $A \in \{L, R, N\}$)

q	n	q'	m	A	Kommentar
q_0	␣	q_f	␣	N	akzeptiere das leere Wort
q_0	X	q_0	X	R	erster Schritt: markiere a mit X, b mit X, c mit X
q_0	a	q_b	X	R	
q_b	a	q_b	a	R	
q_b	X	q_b	X	R	
q_b	b	q_c	X	R	
q_c	b	q_c	b	R	
q_c	X	q_c	X	R	
q_c	c	$q_{ende?}$	X	R	
$q_{ende?}$	␣	$q_{ende!}$	␣	L	Berechnung ist zu Ende
$q_{ende!}$	X	$q_{ende!}$	X	L	prüfe, ob alle Symbole markiert sind
$q_{ende!}$	␣	q_f	␣	N	
$q_{ende?}$	c	q_{anfang}	c	L	wiederhole den ersten Schritt
q_{anfang}	X	q_{anfang}	X	L	
q_{anfang}	b	q_{anfang}	b	L	
q_{anfang}	a	q_{anfang}	a	L	
q_{anfang}	␣	q_0	␣	R	

Aufgabe S20)

Zeigen Sie: Wenn es möglich ist, für zwei beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren, so ist es auch möglich, für beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie die leere Sprache akzeptieren.

Beweis:

- Sei $\mathcal{K}$ eine TM, so dass für alle TMs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ gilt: $\mathcal{K}$ akzeptiert die Eingabe $\mathrm{enc}(\mathcal{M}_1)\#\#\mathrm{enc}(\mathcal{M}_2)$ genau dann, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$, und verwirft sonst.
- Sei $\mathcal{M}_\varnothing$ eine TM, die immer verwirft.
- Dann ist $\mathcal{K}'$ mit $\mathcal{K}'(\mathrm{enc}(\mathcal{M})) = \mathcal{K}(\mathrm{enc}(\mathcal{M})\#\#\mathrm{enc}(\mathcal{M}_\varnothing))$ ein Entscheider für die Leerheit von $\mathbf{L}(\mathcal{M})$.

Aufgabe S21)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes LOOP-Programm terminiert.
2. Zu jedem WHILE-Programm gibt es ein äquivalentes LOOP-Programm.
3. Die Anzahl der Ausführungen von P in der LOOP-Schleife

   $$\texttt{LOOP}\ x_i\ \texttt{DO}\ P\ \texttt{END}$$

   kann beeinflusst werden, indem x_i in P entsprechend modifiziert wird.
4. Die Ackermannfunktion ist total und damit LOOP-berechenbar.

Aufgabe S23)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche eine Lösung haben, ist semi-entscheidbar.
2. Das Postsche Korrespondenzproblem ist bereits über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nicht entscheidbar.
3. Es ist entscheidbar, ob eine Turingmaschine nur Wörter akzeptiert, die Palindrome sind. (Ein Palindrom ist ein Wort $w = a_1 \ldots a_n$ mit $a_1 \ldots a_n = a_n \ldots a_1$.)
4. $\mathbf{P}_{\text{halt}}$ ist semi-entscheidbar.
5. Es ist nicht entscheidbar, ob die von einer deterministischen Turing-Maschine berechnete Funktion total ist.
6. Es gibt reguläre Sprachen, die nicht semi-entscheidbar sind.

Bonusfrage(n)

Zeigen Sie, dass $\{1\}^*$ unentscheidbare Teilmengen besitzt.

Wenn $\mathbf{L} \subseteq \Sigma^*$ eine unentscheidbare Sprache über einem beliebigen Alphabet Σ ist.
Zeigen oder widerlegen Sie, dass

1. $\mathbf{L}$ entscheidbare Teilmengen besitzt.
2. $\mathbf{L}$ entscheidbare Obermengen besitzt.
3. es unendliche viele entscheidbare Teil- oder Obermengen von $\mathbf{L}$ gibt.