Technische Universität Dresden
Institut für Künstliche Intelligenz
Arbeitsgruppe Wissensverarbeitung

Wintersemester 2018/19

Formale Systeme

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 (Beispiele zur NNF und KF Transformation)

Seien p, q und r aussagenlogische Variable. Transformieren Sie die folgenden Formeln *schrittweise* in Negationsnormalform (NNF) sowie in konjunktive Normalform (KF). Verwenden Sie dazu ausschließlich die in der Vorlesung aufgeführten Transformationsregeln.

(a) $(\neg((p \wedge q) \vee p) \vee p)$

(b) $\neg(((p \vee q) \wedge (q \wedge r)) \vee \neg((r \wedge q) \wedge (q \vee p)))$

Aufgabe 5.2 ((Un-)erfüllbarkeit von Klausel(-mengen))

Sei $F = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle$ $(n \geq 1)$ eine aussagenlogische Formel in Klauselform und sei $C = [L_1, \ldots, L_m]$ $(m \geq 0)$ eine Klausel. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) F ist unerfüllbar, wenn eine in F vorkommende Klausel unerfüllbar ist.

(b) F kann unerfüllbar sein obwohl jede in F vorkommende Klausel erfüllbar ist.

(c) C ist erfüllbar gdw. es ein Literal in C gibt.

Aufgabe 5.3 (Beweis von Lemma 3.29)

Beweisen Sie die folgende Aussage.

> Wenn F eine verallgemeinerte Konjunktion von verallgemeinerten Disjunktionen ist und F' aus F durch die Anwendung einer der im Algorithmus zur Transformation in Klauselform verwendeten Ersetzungsregel erhalten wurde, dann gilt: F' ist eine verallgemeinerte Konjunktion von verallgemeinerten Disjunktionen und $F \equiv F'$.

Aufgabe 5.4 (Terminierung der NNF Transformation)

Wir definieren eine geeignete Rangfunktion $\mathsf{r}\colon \mathcal{L}(\mathcal{R}) \to \mathbb{N}$ wie folgt:

$$\mathsf{r}(F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } F \text{ atomar ist} \\ 2 \cdot \mathsf{r}(G) + 1 & \text{falls } F \text{ von der Form } \neg G \text{ ist} \\ \mathsf{r}(G_1) + \mathsf{r}(G_2) + 2 & \text{falls } F \text{ von der Form } (G_1 \circ G_2) \text{ ist} \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie das folgende Lemma:
Sei $F \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$, $\pi \in \mathcal{P}_F$, $F\lceil\pi\rceil = G$ und $H \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ mit $\mathsf{r}(H) < \mathsf{r}(G)$.
Dann gilt: $\mathsf{r}(F\lceil\pi \mapsto H\rceil) < \mathsf{r}(F)$.

(b) Beweisen Sie die Terminierung des NNF Transformationsalgorithmus. (Benützen Sie dazu die Definition der obigen Rangfunktion r und das Lemma aus Teilaufgabe (a).)

Aufgabe 5.5 (Dualismus zwischen KF und DKF)

Sei F eine Formel in der nur die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ vorkommen.
Sei $\overline{F}$ diejenige aussagenlogische Formel, welche aus der Formel F entsteht indem man in F alle Vorkommen von aussagenlogischen Variablen A durch $\neg A$ ersetzt.
Sei F^d diejenige aussagenlogische Formel, welche aus der Formel F entsteht indem man in F alle Junktoren $\wedge$ durch $\vee$ ersetzt und alle $\vee$ durch $\wedge$.

(a) Definieren Sie die beiden Funktionen, welche eine beliebige aussagenlogische Formel F auf $\overline{F}$ bzw. F^d abbilden.

(b) Beweisen Sie, dass für beliebige aussagenlogische Formeln F die logische Äquivalenz $\neg F \equiv \overline{F}^d$ gilt.

Hinweis: *Führen Sie eine strukturelle Induktion über der Struktur von F.*

(c) Definieren Sie unter Benutzung der in Teilaufgabe (b) bewiesenen logischen Äquivalenz ein Verfahren zur Erzeugung der dualen Klauselform für eine Formel $\neg F$, wenn bereits eine Klauselform

$$\langle [L_{1,1}, \ldots, L_{1,n_1}], \ldots, [L_{k,1}, \ldots, L_{k,n_k}] \ldots, [L_{m,1}, \ldots, L_{m,n_m}] \rangle$$

für F gegeben ist.

(d) Wenden Sie das in Teilaufgabe (c) definierte Verfahren auf die folgende Formel F_K in konjunktiver Normalform an um eine zu $\neg F_K$ logisch äquivalente Formel in disjunktiver Normalform zu erhalten. (Die auftretenden Kleinbuchstaben seien aussagenlogische Variable.)

$$\begin{aligned} F_K = \langle\, & [\,\neg a, \neg b, c, d, e, \neg f, \neg g\,], \\ & [\,\neg h, \neg i, \neg j, k, l, \neg m\,], \\ & [\,\neg n, \neg o, \neg p, q, r\,], \\ & [\,s, \neg t, \neg u, \neg v, \neg w\,], \\ & [\,x, \neg y, \neg a, \neg b, \neg c, \neg d\,], \\ & [\,\neg z, \neg a, \neg b, \neg c, d, e, f\,]\,\rangle \end{aligned}$$