Technische Universität Dresden
Institut für Künstliche Intelligenz
Arbeitsgruppe Wissensverarbeitung

Wintersemester 2018/19

Formale Systeme

3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 (Erfüllbare Formelmengen)

Seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ beliebige nichtleere Mengen aussagenlogischer Formeln.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ erfüllbar ist, dann sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ erfüllbar.

(b) Wenn $\mathcal{F}_1$ erfüllbar ist und $\mathcal{F}_2$ ein Modell hat, dann ist auch $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ erfüllbar.

(c) Alle endlichen Teilmengen von $\{p, \neg p\}$ ($p \in \mathcal{R}$) sind erfüllbar.

Aufgabe 3.2 (Unerfüllbarkeit einer Formelmenge)

Gelten die folgenden Aussagen? Beweisen Sie Ihre Antworten mit Hilfe der Semantik, d.h. ausgehend von den Definitionen der Begriffe 'unerfüllbar', 'Modell' usw.

(a) Eine aussagenlogische Formel F ist genau dann unerfüllbar, wenn jede Interpretation I ein Modell für $\neg F$ ist.

(b) Eine Menge aussagenlogischer Formeln $\mathcal{F}$ ist genau dann nicht erfüllbar, wenn für jedes Element $F_i \in \mathcal{F}$ gilt, jede Interpretation I ist Modell für $\neg F_i$.

Aufgabe 3.3 (Kurze Fragen zu $I \models F$ und $\mathcal{F} \models G$)

(a) Es seien eine Interpretation I und eine aussagenlogische Formel $F \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ vorgegeben.
Welche der folgenden Aussagen sind zu $I \models F$ äquivalent?

(1) F ist erfüllbar.
(2) $F^I = \top$.
(3) Für alle Interpretationen I gilt: $F^I = \top$.
(4) Es existiert ein Modell für F.
(5) $\{F\} \models F$.
(6) F ist unter der Interpretation I wahr.

(b) Seien $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{R})$ und $G \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ gegeben.

Welche der folgenden Aussagen sind zu $\mathcal{F} \models G$ äquivalent?

(1) Für jede Interpretation I mit $F^I = \top$ für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt: $G^I = \top$.

(2) $\mathcal{F}$ und G haben die gleichen Modelle.

(3) Wenn $\mathcal{F}$ erfüllbar ist, dann ist auch G erfüllbar.

(4) Alle Modelle von $\mathcal{F}$ sind Modelle von G.

(5) Für alle Interpretationen I gilt:
Wenn $G^I = \bot$, dann existiert ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F^I = \bot$.

(6) Für alle Modelle I von G gilt: Es existiert ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F^I = \top$.

Aufgabe 3.4 (Deduktionstheorem)

Beweisen Sie Satz 3.17 der Vorlesung:

Für aussagenlogische Formeln $F, F_1, \ldots, F_n$ gilt:

$\{F_1, \ldots, F_n\} \models F$ gdw. $\models (((\ldots(F_1 \wedge F_2)\ldots) \wedge F_n) \rightarrow F)$.

Aufgabe 3.5 (Logische Folgerung und Unerfüllbarkeit)

Beweisen Sie: $\mathcal{F} \models G$ gilt genau dann, wenn $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.

Aufgabe 3.6 (Ex falso quodlibet seguitur)

Seien F und G aussagenlogische Formeln und sei $\mathcal{F}$ eine Menge aussagenlogischer Formeln. Beweisen Sie semantisch die folgende Aussage:

Wenn $F \in \mathcal{F}$ und $\neg F \in \mathcal{F}$, dann gilt $\mathcal{F} \models G$ für beliebige G.