3 Komplexitätsklasse NP

3.1 Aussagen über NP-Vollständigkeit

Stimmen folgende Behauptungen?

a) Wenn L_1 in NP liegt und $L_1 \leq_p L_2$ gilt, dann liegt auch L_2 in NP.

b) Wenn L_2 in NP liegt und $L_1 \leq_p L_2$ gilt, dann liegt auch L_1 in NP.

c) Wenn L_1 NP-vollständig ist und $L_1 \leq_p L_2$ gilt, dann ist auch L_2 NP-vollständig.

d) Wenn L_2 NP-vollständig ist und $L_1 \leq_p L_2$ gilt, dann ist auch L_1 NP-vollständig.

3.2 Charakterisierung der Klasse NP

Sei $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ eine binäre Relation.

- R ist *polynomiell entscheidbar* g.d.w. es eine deterministische Turingmaschine gibt, die die Sprache $\{x; y | (x, y) \in R\}$ in polynomieller Zeit entscheidet.
- R ist *polynomiell balanciert* g.d.w. es existiert ein $k \geq 1$ sodass $(x, y) \in R \Longrightarrow |y| \leq |x|^k$.

Beweisen Sie folgende Aussage:
Sei $L \subseteq \Sigma^*$. $L \in NP$ g.d.w. es eine polynomiell entscheidbare und polynomiell balancierte Relation R gibt, sodass $L = \{x \mid \text{es existiert } y \in \Sigma^* \text{ mit } (x, y) \in R\}$.

3.3 SAT liegt in NP

Zeigen Sie mit Hilfe der Aussage in Aufgabe 5.2, dass SAT in NP liegt.

3.4 NAE-3SAT ist in NP

NAE steht für "Not All Equal" – wir fordern also für ein 3SAT-Problem zusätzlich, dass die 3 Literale einer Klausel nicht den selben Wahrheitswert haben dürfen.
Zeigen Sie, dass NAE-3SAT in NP liegt, indem Sie es auf SAT reduzieren.

3.5 MaxSAT ist NP-Vollständig

Geben sei die folgende Sprache:

$MaxSAT = \{(F, k) \mid \text{es existiert eine Interpretation } I, \text{ sodass } k \text{ Klauseln in } F \text{ erfüllt werden}\}$

Zeigen Sie, dass MaxSAT NP-vollständig ist.

3.6 Spezialfall von CNF-SAT

Zeigen Sie, dass der Spezialfall von CNF-SAT, in dem jede Variable maximal zwei Mal vorkommen darf, in P liegt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Zeigen Sie folgende Aussage:
Sei $\langle C_1, \ldots, C_n, D_1, D_2 \rangle$ eine aussagenlogische Formel in KNF, wobei $A \in D_1$ und $\neg A \in D_2$ und die Variable A nicht in $C_1, \ldots C_n$ vorkommt. Sei D die Resolvente von D_1 und D_2 über A. Dann gilt:

$$\langle C_1, \ldots C_n, D_1, D_2 \rangle \text{ ist erfüllbar } \iff \langle C_1, \ldots C_n, D \rangle \text{ ist erfüllbar}$$

b) Sei $\langle C_1, \ldots C_n, D_1, D_2 \rangle$ eine Formel, sodass ($A \in D_1$ und $A \in D_2$) oder ($\neg A \in D_1$ und $\neg A \in D_2$), und die Variable A taucht in $C_1, \ldots, C_n$ nicht auf. Dann gilt:

$$\langle C_1, \ldots C_n, D_1, D_2 \rangle \text{ ist erfüllbar } \iff \langle C_1, \ldots C_n \rangle \text{ ist erfüllbar}$$

c) Verbinden Sie obige Aussagen und zeigen Sie, dass jede Formel im Spezialfall erfüllbar ist.