



Übungen zur Lehrveranstaltung  
**Theoretische Informatik und Logik**

Sommersemester 2022

**8. Übungsblatt**

Woche vom 13. bis 17. Juni 2022

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

**Aufgabe P**

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x. \exists y. (p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))),$$

wobei  $c_1, c_2$  Konstanten sind, folgendes an:

- die Menge aller Teilformeln;
- die Menge aller Terme;
- die Menge aller Variablen, mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen;
- ein Interpretation  $\mathcal{I}$  und eine Zuweisung  $\mathcal{Z}$  für  $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$ .

**Aufgabe Q**

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- Es gilt  $\{F\} \models G$  genau dann, wenn  $F \rightarrow G$  allgemeingültig ist.
- Es gilt  $\{F_1, \dots, F_k\} \models G$  genau dann, wenn  $\bigwedge_{i=1}^k F_i \rightarrow G$  allgemeingültig ist.

**Aufgabe R**

Seien  $F, G$  Formeln und  $x$  eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x. (F \rightarrow G) \equiv \forall x. F \rightarrow \exists x. G.$$

**Aufgabe 1**

Gegeben sei ein Universum aus verschiedenen Personen und Speisen und ein Prädikat  $mag$ , so dass  $mag(x, y)$  ausdrückt „ $x$  mag  $y$ “.

- „Übersetzen“ Sie folgende prädikatenlogische Formeln in natürlichsprachlich formulierte

Aussagen:

- (a)  $\forall x. mag(x, Eiscreme)$ .
  - (b)  $\forall x. \exists y. mag(x, y)$ .
  - (c)  $\forall x. \forall y. mag(x, y) \wedge \neg mag(x, y)$ .
- b) „Übersetzen“ Sie folgende natürlichsprachlich formulierte Aussagen in prädikatenlogische Formeln:
- (a) Tom mag keinen Fisch.
  - (b) Jeder, der Pizza mag, mag auch Spaghetti.
  - (c) Es gibt niemanden, der alles mag.

### Aufgabe 2

Welche der angegebenen Strukturen sind Modelle der folgenden Formel?

$$\forall x. p(x, x) \wedge \forall x, y. ((p(x, y) \wedge p(y, x)) \rightarrow x \approx y) \wedge \forall x, y, z. ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$$

- a)  $\mathcal{I}_1$  mit Grundmenge  $\mathbb{N}$  und  $p^{\mathcal{I}_1} = \{ (m, n) \mid m < n \}$ ;
- b)  $\mathcal{I}_2$  mit Grundmenge  $\mathbb{N}$  und  $p^{\mathcal{I}_2} = \{ (n, n + 1) \mid n \in \mathbb{N} \}$ ;
- c)  $\mathcal{I}_3$  mit Grundmenge  $\mathbb{N}$  und  $p^{\mathcal{I}_3} = \{ (m, n) \mid m \text{ teilt } n \}$ ;
- d)  $\mathcal{I}_4$  mit Grundmenge  $\Sigma^*$  für ein Alphabet  $\Sigma$  und  $p^{\mathcal{I}_4} = \{ (x, y) \mid x \text{ ist Präfix von } y \}$ ;
- e)  $\mathcal{I}_5$  mit Grundmenge  $\mathfrak{P}(M)$  für eine Menge  $M$  und  $p^{\mathcal{I}_5} = \{ (X, Y) \mid X \subseteq Y \}$ .

### Aufgabe 3

- a) Geben Sie je eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, so dass alle Modelle

- (a) höchstens drei,
- (b) mindestens drei,
- (c) genau drei

Elemente in der Grundmenge besitzen.

- b) Geben Sie je eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, so dass das zweistellige Relationensymbol  $p$  in jedem Modell als der Graph einer

- (a) injektiven Funktion,
- (b) surjektiven Funktion,
- (c) bijektiven Funktion

interpretiert wird.

(Der Graph einer Funktion  $f: A \rightarrow B$  ist die Relation  $\{ (x, y) \in A \times B \mid f(x) = y \}$ .)

#### Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) Sind  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  Mengen von prädikatenlogischen Formeln, dann folgt aus  $\Gamma \subseteq \Gamma'$  und  $\Gamma \models F$  auch  $\Gamma' \models F$ .
- b) Jede aussagenlogische Formel ist eine prädikatenlogische Formel.
- c) Eine prädikatenlogische Formel  $F$  ist genau dann allgemeingültig, wenn  $\neg F$  unerfüllbar ist.
- d) Es gilt

$$\{ \forall x, y. (p(x, y) \rightarrow p(y, x)), \forall x, y, z. ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z)) \} \models \forall x. p(x, x).$$